

MATRICES

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tous les résultats présentés dans ce chapitre demeurent vrais si $\mathbb{K}$ est un corps quelconque, mais nous ne nous en préoccupons pas ici. Les lettres $n, p, q, \dots$ désignent des entiers naturels non nuls.

1 MATRICES ET OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

1.1 NOTION DE MATRICE ET STRUCTURE VECTORIELLE

Définition (Matrice)

- On appelle *matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$* toute famille A de np éléments de $\mathbb{K}$ présentée sous la forme d'un tableau $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ noté $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, où $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$.

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, le scalaire a_{ij} est appelé *coefficient de A de position (i, j)* , la matrice $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ est appelée la $j^{\text{ème}}$ *colonne de A* et la matrice $(a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{ip})$ est appelée sa $i^{\text{ème}}$ *ligne*.

Si A est carrée, la famille $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ est appelée *diagonale de A* .

- L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Pour $n = p$, on parle des matrices *carrées de taille n* et on emploie la notation $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ plutôt que la notation $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Pour $p = 1$, on parle de *matrices colonnes de taille n* . Enfin, pour $n = 1$, on parle de *matrices lignes de taille p* .

⚡ ⚡ ⚡ Explication

- Une matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ n'est rien de plus qu'un élément de $\mathbb{K}^{np}$, i.e. une famille de np éléments de $\mathbb{K}$, mais qu'on a préféré écrire sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes. Ainsi, en réalité : $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{np}$. Pourquoi donc introduire les matrices dans ce cas ? Parce que nous allons sous peu introduire une loi interne de produit sur les matrices, et vous verrez qu'il est bien pratique d'écrire les matrices comme des tableaux et non comme des familles.
- L'usage veut qu'on utilise le plus possible la lettre i pour indice des lignes et la lettre j pour indice des colonnes.
- Par convention dans ce cours, si A (majuscule) est une matrice de taille $n \times p$, nous noterons a_{ij} (minuscule) le coefficient de A de position (i, j) .

Théorème (Structure vectorielle sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$) Muni de la structure vectorielle naturelle de $\mathbb{K}^{np}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \times p$.

- Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} & \cdots & \lambda a_{1p} + \mu b_{1p} \\ \lambda a_{21} + \mu b_{21} & \lambda a_{22} + \mu b_{22} & \cdots & \lambda a_{2p} + \mu b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} + \mu b_{n1} & \lambda a_{n2} + \mu b_{n2} & \cdots & \lambda a_{np} + \mu b_{np} \end{pmatrix}$.

- Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont le coefficient de position (i, j) est égal à 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls. Alors $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée sa *base canonique*.

⚡ ⚡ ⚡ **Explication** Tâchons de comprendre à quoi ressemble la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans le cas où $n = 3$ et $p = 2$. Il s'agit ni plus ni moins de la base canonique de $\mathbb{K}^6$ écrite convenablement sous forme matricielle. Par définition :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$, les coordonnées de A dans la base canonique sont $(a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{12}, a_{22}, a_{32})$ car :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{21}E_{21} + a_{31}E_{31} + a_{12}E_{12} + a_{22}E_{22} + a_{32}E_{32}.$$

1.2 PRODUIT MATRICIEL

Définition (Produit matriciel) Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Par définition, le *produit de A par B*, noté $A \times B$ ou AB , est la matrice $\left(\sum_{k=1}^q a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq r}}$ de taille $p \times r$.

Produit et somme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^q a_{1k} b_{k1} & \sum_{k=1}^q a_{1k} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^q a_{1k} b_{kr} \\ \sum_{k=1}^q a_{2k} b_{k1} & \sum_{k=1}^q a_{2k} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^q a_{2k} b_{kr} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^q a_{pk} b_{k1} & \sum_{k=1}^q a_{pk} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^q a_{pk} b_{kr} \end{pmatrix}$$

Diagram illustrating the matrix multiplication process. A matrix A of size p x q is multiplied by a matrix B of size q x r. The result is a matrix of size p x r, where each element is the sum of products of elements from the corresponding row of A and column of B. The diagram shows the first row of A being multiplied by the first column of B to get the first element of the result matrix.

L'illustration ci-dessus fournit **LA** méthode pratique de calcul du produit de deux matrices. Cela dit, sur une copie, vous n'êtes pas autorisés à écrire ainsi les matrices les unes au-dessus des autres.

××× Attention !

- Le produit d'une matrice de taille $p \times q$ par une matrice de taille $q \times r$ est une matrice de taille $p \times r$. Le produit de deux matrices en général n'est cependant pas défini s'il n'y a pas, comme on dit, *compatibilité des formats*.

$$\text{Matrice de taille } p \times \underbrace{q}_{\text{-----}} \times \text{Matrice de taille } \underbrace{q}_{\text{-----}} \times r = \text{Matrice de taille } p \times r$$

- Le produit matriciel n'est pas commutatif — même en cas de compatibilité des formats ! Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Un produit de matrices peut être nul sans qu'aucune de ces matrices soit nulle. Exemple : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Exemple Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Alors $A \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de A, et $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \times A$ sa $i^{\text{ème}}$ ligne. Exemple **TRÈS** important !

Diagram illustrating the multiplication of a matrix A by a column vector of zeros with a 1 at position j. The result is the j-th column of A. Similarly, multiplying a row vector of zeros with a 1 at position i by A gives the i-th row of A.

🐞 🐞 🐞 **Explication** Remarque fondamentale : tout système linéaire peut être écrit matriciellement comme un produit. Par

exemple, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 3 \\ 0x + 5y + z = 2 \\ 9x + 10y = 1 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice du système}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{Second membre}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Second membre}}.$$

Un système linéaire dont tous les coefficients du second membre sont nuls est dit *homogène* ou *sans second membre*.

Par convention, quand une matrice contient beaucoup de zéros, on omet souvent de les noter par souci de lisibilité.

Théorème (Propriétés du produit matriciel, matrice identité)

- **Associativité** : Pour tous $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$(AB)C = A(BC) \quad \text{et} \quad \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

- **Bilinéarité** : Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC \quad \text{et} \quad C(\lambda A + \mu B) = \lambda CA + \mu CB.$$

- **Élément neutre** : On appelle *matrice identité de taille n* la matrice carrée $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ de taille n .

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $I_n A = A I_p = A$.

Démonstration Contentons-nous de démontrer l'associativité du produit matriciel : $(AB)C = A(BC)$.

$$\text{Puisque } AB = \left(\sum_{k=1}^q a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq r}}, \text{ alors } (AB)C = \left(\sum_{l=1}^r \left[\sum_{k=1}^q a_{ik} b_{kl} \right] c_{lj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq s}}.$$

$$\text{De même, puisque } BC = \left(\sum_{l=1}^r b_{il} c_{lj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq s}}, \text{ alors } A(BC) = \left(\sum_{k=1}^q a_{ik} \left[\sum_{l=1}^r b_{kl} c_{lj} \right] \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq s}}.$$

On obtient le résultat voulu en permutant les symboles de sommation dans $(AB)C$ et $A(BC)$. ■

Définition (Application linéaire associée à une matrice) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application $\begin{cases} \mathbb{K}^p & \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto AX \end{cases}$ est linéaire. On l'appelle l'*application linéaire associée à A*.

⚡ ⚡ ⚡ **Explication** Dans cette définition, le vecteur X de $\mathbb{K}^p$ est considéré comme une matrice colonne, ce qui est possible puisque $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^p$. Sans cela, le produit AX n'aurait pas de sens. De la même manière, la matrice colonne AX de taille n peut être considérée comme un vecteur de $\mathbb{K}^n$ car $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$.

Exemple L'application linéaire associée à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ est $\begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto (y + 2z, 3x + 4y + 5z) \end{cases}$.

1.3 TRANSPOSITION

Définition (Transposée) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *transposée de A* la matrice $(a_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée ${}^t A$.

Exemple ${}^t \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ et ${}^t \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_n)$.

Théorème (Propriétés de la transposition)

- **Linéarité** : Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^t A + \mu {}^t B$.
- **Involutivité** : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. ${}^t({}^t A) = A$.
- **Produit** : Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$.

Démonstration Seule l'assertion sur le produit mérite une preuve. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$({}^t(AB))_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^q a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^q b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^q ({}^t B)_{ik} ({}^t A)_{kj} = ({}^t B {}^t A)_{ij}. \quad \blacksquare$$

2 REPRÉSENTATION MATRICIELLE DES FAMILLES DE VECTEURS ET DES APPLICATIONS LINÉAIRES

2.1 MATRICE D'UNE FAMILLE DE VECTEURS DANS UNE BASE

Définition (Matrice d'une famille de vecteurs dans une base) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ une famille quelconque de vecteurs de E . Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, notons a_{ij} la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de x_j dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

La matrice $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, notée $\text{Mat}_{(e_1, e_2, \dots, e_n)}(x_1, x_2, \dots, x_p)$, est appelée *matrice de la famille $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$* .

$$\text{Mat}_{(e_1, e_2, \dots, e_n)}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \begin{array}{ccccccc} & x_1 & x_2 & & x_j & & x_p \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \leftarrow & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \end{array}$$

Coordonnées de x_j dans $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, écrites en colonne $\uparrow$

Exemple

- Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E . Alors pour tout $x \in E$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est tout simplement la colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
- Si on note $\mathcal{B}_4$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_4}((1, 0, 3, 1), (2, -1, 0, -1)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

××× Attention ! Si on change la base dans laquelle on exprime la matrice d'une famille de vecteurs, il est bien évident que la matrice en question change aussi. Dans l'exemple ci-dessous, on s'est contenté de modifier l'ordre des vecteurs :

$$\text{Mat}_{(1, X, X^2, X^3, X^4)}(X^3 + 2X + 1, X, X^2 - X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{(X^4, X^3, X^2, X, 1)}(X^3 + 2X + 1, X^2 - X, X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème (Toute matrice est égale à la matrice de ses colonnes dans la base canonique) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, C_2, \dots, C_p \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ rangées dans l'ordre naturel.

Si on note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors : $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(C_1, C_2, \dots, C_p)$.

Démonstration Réfléchissez ! Il faut que ce petit résultat coule dans vos veines. ■

2.2 MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE DANS DES BASES

Définition (Matrice d'une application linéaire dans des bases) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives p et n , $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de F . Soit en outre $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle *matrice de f dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$* et on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ la matrice de la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$ dans la base $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ de F .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(\mathcal{B})) = \text{Mat}_{(f_1, f_2, \dots, f_n)}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)) =$$

$$\begin{array}{ccccccc} & f(e_1) & f(e_2) & & f(e_j) & & f(e_p) \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \leftarrow & \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{matrix} \end{array}$$

Coordonnées de $f(e_j)$ dans $(f_1, f_2, \dots, f_n)$, écrites en colonne $\nearrow$

Si $E = F$ et si $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$ est simplement notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

✖ ✖ ✖ Attention ! Si on change les bases dans lesquelles on exprime la matrice d'une application linéaire, il est bien évident que la matrice en question change aussi. Un exemple le montre un peu plus bas.

Exemple Si E est de dimension finie n et si $\mathcal{B}$ est une base de E , alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n$.

Exemple On note φ l'application linéaire $\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto (x, x+y, y-x) \end{cases}$ et $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. On pose également $\mathcal{B}'_2 = ((0, 1), (1, 0))$ et $\mathcal{B}'_3 = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$, bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

Alors : $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

En effet Pour la première matrice, déterminons les coordonnées de $\varphi(1, 0)$ et $\varphi(0, 1)$ dans la base canonique $\mathcal{B}_3$ de $\mathbb{R}^3$: $\varphi(1, 0) = (1, 1, -1)$ et $\varphi(0, 1) = (0, 1, 1)$. Ce sont déjà les coordonnées voulues. Pour la deuxième matrice, déterminons les coordonnées de $\varphi(0, 1)$ et $\varphi(1, 0)$ dans $\mathcal{B}'_3$.

$$\varphi(0, 1) = (0, 1, 1) = (1, 1, 1) - (1, 0, 0) \quad \text{et} \quad \varphi(1, 0) = (1, 1, -1) = -(1, 1, 1) + 2(1, 1, 0).$$

Ainsi les coordonnées de $\varphi(0, 1)$ dans $\mathcal{B}'_3$ sont $(1, 0, -1)$ et celles de $\varphi(1, 0)$ sont $(-1, 2, 0)$.

Exemple On note T l'application linéaire $\begin{cases} \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_5[X] \\ P & \longmapsto X^4 P^{(3)} + P(2) + P(-X) \end{cases}$ et $\mathcal{B}_4$ et $\mathcal{B}_5$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_4[X]$ et $\mathbb{R}_5[X]$. Alors : $\text{Mat}_{\mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$.

En effet Il nous faut déterminer les coordonnées de $T(1)$, $T(X)$, $T(X^2)$, $T(X^3)$ et $T(X^4)$ dans $\mathcal{B}_5$, puis les ranger convenablement dans un tableau.

$$T(1) = 0 + 1 + 1 = 2, \quad T(X) = 0 + 2 + (-X) = -X + 2, \quad T(X^2) = 0 + 2^2 + (-X)^2 = X^2 + 4,$$

$$T(X^3) = X^4 \times 6 + 2^3 + (-X)^3 = 6X^4 - X^3 + 8 \quad \text{et} \quad T(X^4) = X^4 \times 24X + 2^4 + (-X)^4 = 24X^5 + X^4 + 16.$$

Théorème (Toute matrice est égale à la matrice de l'application linéaire qui lui est associée dans les bases canoniques) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Nous savons que A peut être vue comme une application linéaire $\begin{cases} \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X \longmapsto AX \end{cases}$ que nous notons aussi A .
Si on note $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, alors : $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_n}(A)$.

Démonstration Réfléchissez ! Il faut que ce petit résultat coule dans vos veines. ■

Théorème (Une application linéaire est entièrement déterminée par sa matrice dans des bases) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives p et n , $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F .
Alors l'application $\begin{cases} \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \end{cases}$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
En particulier, pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\lambda f + \mu g) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(g)$.

Démonstration

- La construction de la matrice d'une application linéaire rend « évidente » la linéarité de l'application $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ du théorème : réfléchissez !
- Nous savons que : $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F = np = \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Pour montrer que l'application Mat est bijective, il nous suffit donc de montrer qu'elle est injective.
- Soit $f \in \text{Ker } \text{Mat}$. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$. Notons $e_1, e_2, \dots, e_p$ les vecteurs de $\mathcal{B}$, dans l'ordre. Par définition de la matrice d'une application linéaire, $f(e_j)$ a toutes ses coordonnées nulles dans la base $\mathcal{C}$ pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, donc $f(e_j) = 0_F$. A fortiori, par linéarité, $\mathcal{B}$ étant une base de E , f est nulle. ■

Théorème (Règles de calcul pour passer d'un point de vue vectoriel à un point de vue matriciel, et vice versa)

(i) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F . Soient en outre $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $x \in E$ et $y \in F$. Si on pose $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$, $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(y)$, alors :

$$y = u(x) \iff Y = UX.$$

(ii) Soient E_1, E_2, E_3 trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$. Soient en outre $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ et $g \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f).$$

✂ ✂ ✂ **Explication** Théorème fondamental s'il en est !

- Dans l'assertion (i), on rappelle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est la colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$; même chose pour $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(y)$. Cette assertion montre que le calcul de $u(x)$ (point de vue vectoriel) est équivalent au calcul du produit matriciel UX (point de vue matriciel). Précisément, UX est le vecteur des coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathcal{C}$. Ceci va nous permettre de profiter du calcul matriciel pour parler des applications linéaires abstraites en dimension finie.
- L'assertion (ii) montre que le produit matriciel et la composition des applications linéaires sont deux faces d'une même pièce. Le produit est aux matrices ce que la composition est aux applications linéaires.

Démonstration

(i) Introduisons les vecteurs de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$: $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

$$\begin{aligned} y = u(x) &\iff \sum_{i=1}^n y_i f_i = u\left(\sum_{j=1}^p x_j e_j\right) \iff \sum_{i=1}^n y_i f_i = \sum_{j=1}^p x_j u(e_j) \iff \sum_{i=1}^n y_i f_i = \sum_{j=1}^p x_j \sum_{i=1}^n u_{ij} f_i \\ &\iff \sum_{i=1}^n y_i f_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p u_{ij} x_j\right) f_i \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad y_i = \sum_{j=1}^p u_{ij} x_j \iff Y = UX. \end{aligned}$$

(ii) Posons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$, $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(g)$ et $C = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}(g \circ f)$. Nous devons montrer que $BA = C$, i.e. que C et BA ont les mêmes colonnes.

Fixons $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, où $n = \dim E_1$, et notons e_j le $j^{\text{ème}}$ vecteur de $\mathcal{B}_1$ et E_j la matrice des coordonnées de e_j dans $\mathcal{B}_1$. D'après (i), AE_j est la colonne des coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathcal{B}_2$, donc BAE_j la colonne des coordonnées de $g \circ f(e_j)$ dans $\mathcal{B}_3$, qui est aussi égale à CE_j . Conclusion : $BAE_j = CE_j$.

Or E_j est la colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où le coefficient 1 est placé en $j^{\text{ème}}$ position. Nous avons déjà vu qu'alors BAE_j

est la $j^{\text{ème}}$ colonne de BA et CE_j la $j^{\text{ème}}$ de C . Conclusion : BA et C ont la même $j^{\text{ème}}$ colonne. ■

Exemple On note R l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$.

Alors $\text{Ker } R = \text{Vect}((0, \sqrt{3}, 1))$.

En effet Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: $(x, y, z) \in \text{Ker } R \iff R(x, y, z) = (0, 0, 0)$

$$\iff \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4x & = & 0 \\ y - \sqrt{3}z & = & 0 \\ -\sqrt{3}y + 3z & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & 0 \\ y & = & \sqrt{3}z. \end{cases}$$

Comme annoncé, $\text{Ker } R = \text{Vect}((0, \sqrt{3}, 1))$.

Exemple L'endomorphisme θ de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est la

symétrie par rapport à $\text{Vect}(X^3 + X^2 + X, X^2 + 1)$ parallèlement à $\text{Vect}(X^3 + X + 1, X^3 + X^2)$.

En effet

- Par définition, θ est linéaire. Montrer que θ est une symétrie revient donc à montrer que $\theta^2 = \text{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}$. D'un point de vue matriciel, cela revient donc à dire que $\Theta^2 = I_4$ — égalité que l'on vérifie aisément.
- Cherchons le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ par rapport auquel θ est une symétrie, à savoir $\text{Ker}(\theta - \text{Id}_{\mathbb{R}_3[X]})$. Pour tout $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$:

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(\theta - \text{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}) &\iff \theta(P) = P &\iff \Theta \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} b - a = d \\ -d + c + b - a = c \\ -d + 2c + b - 2a = b \\ -d + 2c + b - 2a = a \end{cases} \\ &&\iff \begin{cases} -d + b - a = 0 \\ -d + b - a = 0 \\ c - a = 0 \\ -d + 2c + b - 3a = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} -d + b - a = 0 \\ c - a = 0 \end{cases} \\ &&\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \begin{cases} a = \lambda \\ b = \lambda + \mu \\ c = \lambda \\ d = \mu. \end{cases} &\text{Ainsi } \text{Ker}(\theta - \text{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}) = \text{Vect}(X^3 + X^2 + X, X^2 + 1). \end{aligned}$$

Ci-dessus, la colonne des coordonnées de P est tout simplement $\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ car on travaille avec la base canonique

de $\mathbb{R}_3[X]$ — attention à l'ordre, quand même. Dans une autre base, le calcul aurait été plus délicat.

- On montre de la même manière que $\text{Ker}(\theta + \text{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}) = \text{Vect}(X^3 + X + 1, X^3 + X^2)$.

3 MATRICES CARRÉES

3.1 L'ANNEAU $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Le produit de deux matrices carrées de taille n est une matrice carrée de taille n : la multiplication des matrices est donc une loi de composition interne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}$, nous pouvons donc noter A^k la matrice $\overbrace{A \times A \times \dots \times A}^{k \text{ fois}}$, avec la convention $A^0 = I_n$. Il a dès lors un sens, pour tout $P = \sum_{k=0}^{\infty} p_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, de noter $P(A)$ la matrice $\sum_{k=0}^{\infty} p_k A^k$ (somme finie).

Le théorème suivant est une conséquence immédiate des résultats précédents.

Théorème (Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau d'élément neutre I_n pour la multiplication. Pour $n \geq 2$, cet anneau n'est ni commutatif ni intègre.

L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède une autre propriété remarquable de stabilité : la transposée d'une matrice carrée de taille n est encore une matrice carrée de taille n .

Théorème (Deux formules à connaître) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A et B commutent. Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(A + B)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i} \quad (\text{formule du binôme de Newton}) \quad \text{et} \quad A^k - B^k = (A - B) \sum_{i=0}^{k-1} A^i B^{k-i-1}.$$

*** **Attention !** L'hypothèse que A et B commutent n'est pas là pour décorer !

Exemple On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$: $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En effet Pour calculer les puissances de A , écrivons $A = I_3 + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Bien sûr, I_3 et J commutent car I_3 commute avec toute matrice carrée de taille 3, et on remarque que $J^2 = 0$, donc que $J^i = 0$ pour tout $i \geq 2$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $A^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} I_3^i J^{k-i} = I_3 + kJ = \begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème (Les anneaux $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont isomorphes) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E . Alors l'application $\begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{cases}$ est un isomorphisme d'anneaux.

Démonstration Cette application, on l'a déjà vu, est un isomorphisme linéaire, donc une bijection et un morphisme de groupes pour l'addition. Nous avons également vu qu'elle préserve les produits — c'est ce que dit la formule « $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ » — et enfin : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n$. ■

3.2 MATRICES INVERSIBLES

Définition (Matrice inversible et inverse, groupe linéaire)

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *inversible* (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) si A est inversible (pour la multiplication) dans l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$, i.e. s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

On sait déjà qu'une telle matrice B , si elle existe, est unique, notée A^{-1} et appelée l'*inverse* de A .

- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles :

- 1) A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$;
- 2) AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ — **et non pas** $A^{-1}B^{-1}$!
- 3) pour tout $k \in \mathbb{Z}$, A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$;
- 4) tA est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

- L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe d'élément neutre I_n appelé le *groupe linéaire de degré n sur $\mathbb{K}$* .

Pour tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension n et pour toute base $\mathcal{B}$ de E , la restriction à $\mathcal{GL}(E)$ de l'isomorphisme d'anneaux

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array} \right. \text{ est un isomorphisme de groupes } \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{GL}(E) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array} \right.$$

Démonstration Nous devons seulement prouver 4), car les assertions 1), 2) et 3) sont des vérités générales de la théorie des anneaux. Vérification : ${}^tA \times {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tI_n = I_n$ et de même ${}^t(A^{-1}) \times {}^tA = I_n$. ■

✖ ✖ ✖ **Attention !** La notation $\frac{A}{B}$, où A et B sont deux matrices, est rigoureusement interdite, même lorsque B est inversible. Quel en serait le sens : AB^{-1} ou $B^{-1}A$? Deux matrices ne commutent pas en général.

Théorème ($AB = I_n$ suffit) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = I_n$. Alors A et B sont inversibles, inverses l'une de l'autre.

🐞 🐞 🐞 **Explication** En principe, montrer que A est inversible revient à montrer l'existence d'une matrice B telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$. Ce théorème montre que l'une ou l'autre des assertions suffit en réalité, ce qui est bien pratique.

Démonstration L'application $\beta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & BM \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Or $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, donc il nous suffit d'établir l'injectivité de β pour avoir sa bijectivité. Or en effet β est injective, car pour tout $M \in \text{Ker } \beta$: $M = I_n M = (AB)M = A(BM) = A\beta(M) = A \times 0 = 0$.

La bijectivité de β montre alors en particulier que pour une certaine matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\beta(A') = I_n$. Or en fait : $A' = I_n A' = (AB)A' = A(BA') = A\beta(A') = AI_n = A$. Bref : $AB = BA = I_n$ comme voulu. ■

Théorème (Inversibilité des matrices carrées de taille 2) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. On appelle *déterminant* de $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, noté $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$, le scalaire $ad - bc$.

La matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Dans ce cas $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Démonstration Par un simple calcul : $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = (ad - bc)I_2$.

- Du coup, clairement, si $ad - bc \neq 0$, alors $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.
- Dans l'autre sens, si nous supposons par l'absurde $ad - bc = 0$ et $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ inversible, alors après multiplication par $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}$, $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = 0$, i.e. $a = b = c = d = 0$, et donc $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = 0$ — alors que $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est supposée inversible. ■

Pour trouver d'autres exemples de matrices inversibles, nous avons besoin de résultats théoriques sur l'inversibilité des matrices.

Théorème (Bijektivité = inversibilité) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de même dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F . Soit en outre $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f)$ est inversible. Dans ce cas : $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) = \left(\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f) \right)^{-1}$.

Démonstration

- Si f est bijective, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\text{Id}_F) = I_n$ et $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n$, donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ est inversible d'inverse $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1})$.
- Réciproquement, si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ est inversible, notons g l'unique application linéaire de F dans E pour laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(g) = A^{-1}$. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = A^{-1}A = I_n$ et de même $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f \circ g) = I_n$. On en déduit que $g \circ f = \text{Id}_E$ et que $f \circ g = \text{Id}_F$, bref que f est bijective de E sur F , comme voulu. ■

Corollaire (Caractérisation des matrices inversibles en termes de systèmes linéaires, système de Cramer)

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible.

(ii) Pour tout second membre $Y \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire $Y = AX$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une et une seule solution. En d'autres termes : $\forall Y \in \mathbb{K}^n, \exists ! X \in \mathbb{K}^n / Y = AX$.

- Un système linéaire (carré) associé à une matrice inversible est appelé un *système de Cramer*. Précisément, si le système $Y = AX$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$, de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et de second membre $BY \in \mathbb{K}^n$ est de Cramer, sa solution unique est la colonne $X = A^{-1}Y$.

Démonstration Si on note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé à A , nous savons que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(A)$. Du coup la **matrice** A est inversible — assertion (i) — si et seulement si l'**endomorphisme** A est bijectif, i.e. si et seulement si l'assertion (ii) est vraie. ■

  **En pratique** Méthode en or pour montrer qu'une matrice carrée est inversible et calculer son inverse ! Si pour tout second membre Y on arrive à trouver une et une seule solution X au système linéaire $Y = AX$, alors A est inversible.

Dans ce cas, avoir trouvé cet unique X , c'est avoir transformé le système linéaire $Y = AX$ en un système linéaire de la forme $X = BY$ pour une certaine matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ce qui est intéressant, c'est qu'alors $B = A^{-1}$.

Exemple La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En effet

- Notons A la matrice étudiée. Soit $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} Y = AX &\iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = y_1 \\ x_2 - x_3 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{aligned}$$

Si on est juste intéressé par l'inversibilité de A , on peut conclure dès maintenant. En effet, le système obtenu ci-dessus est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, donc possède une et une seule solution, et ce pour tout second membre Y . Bref, A est inversible.

- Et si on veut aussi calculer A^{-1} ? On achève la résolution.

$$Y = AX \iff \begin{cases} x_1 = -2y_1 + 3y_2 - 4y_3 \\ x_2 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Et voilà : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ comme annoncé.

Exemple La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

En effet Notons A la matrice étudiée. Soit $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} Y = AX &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 & + & 2x_3 & = & y_1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & y_2 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 6x_3 & = & y_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 & + & 2x_3 & = & y_1 \\ & 3x_2 & - & 6x_3 & = & y_2 - 2y_1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & 6x_2 & - & 12x_3 & = & y_3 - 3y_1 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 & + & 2x_3 & = & y_1 \\ & 3x_2 & - & 6x_3 & = & y_2 - 2y_1 \\ & & 0 & = & y_3 - 2y_2 + y_1 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Le système obtenu est triangulaire, mais l'un de ses coefficients diagonaux est nul, il ne possède donc pas une et une seule solution pour tout second membre Y . Bref, A n'est pas inversible.

Théorème (Base = inversibilité) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E . Alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.

Démonstration Introduisons les vecteurs de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$: $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ et notons f l'unique endomorphisme de E tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $f(e_k) = f_k$.

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \iff \begin{matrix} f(\mathcal{B}) = \mathcal{F} \\ \mathcal{B} \text{ base de } E \end{matrix} \text{ avec } f \text{ est un automorphisme de } E \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ est inversible.}$$

On conclut en remarquant que : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$. ■

Corollaire (Caractérisation des matrices inversibles au moyen de leurs lignes/colonnes) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est inversible.
- (ii) La famille des colonnes de A est une base de $\mathbb{K}^n$ — cela revient à dire qu'elle est libre ou génératrice.
- (iii) La famille des lignes de A est une base de $\mathbb{K}^n$ — cela revient à dire qu'elle est libre ou génératrice.

Démonstration

- (i) $\iff$ (ii) Nous savons que A est égale à la matrice de ses colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Le théorème précédent montre donc l'équivalence (i) $\iff$ (ii).
- (ii) $\iff$ (iii) Nous savons que A est inversible si et seulement si ${}^t A$ l'est, et que la transposition échange les lignes et les colonnes de A . L'équivalence (i) $\iff$ (iii) se déduit donc de l'équivalence (i) $\iff$ (ii). ■

3.3 QUELQUES FORMES PARTICULIÈRES DE MATRICES CARRÉES

3.3.1 MATRICES DIAGONALES

Définition (Matrice diagonale, matrice scalaire)

- Une matrice carrée est dite *diagonale* si tous ses coefficients non diagonaux sont nuls.

Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ est souvent notée $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

- Une matrice carrée est dite *scalaire* si elle est diagonale et si tous ses coefficients diagonaux sont égaux. Les matrices scalaires de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont donc toutes les matrices λI_n , λ décrivant $\mathbb{K}$.

Théorème (Anneau des matrices diagonales)

(i) L'ensemble des matrices diagonales de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Plus précisément, pour tous $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

$$\alpha \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) + \beta \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \operatorname{diag}(\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1, \alpha\lambda_2 + \beta\mu_2, \dots, \alpha\lambda_n + \beta\mu_n)$$

$$\text{et } \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \times \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1, \lambda_2\mu_2, \dots, \lambda_n\mu_n).$$

(ii) Une matrice diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Plus précisément, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$:

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$
3.3.2 MATRICES TRIANGULAIRES

Définition (Matrice triangulaire) Une matrice carrée est dite *triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) si ses coefficients situés strictement au-dessous (resp. strictement au-dessus) de la diagonale sont nuls.

Exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

Par ailleurs les matrices diagonales sont exactement les matrices qui sont à la fois triangulaires inférieures et supérieures.

Théorème (Anneau des matrices triangulaires supérieures/inférieures)

(i) L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(ii) Soit $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure. Alors T est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

De plus, dans ce cas, T^{-1} est triangulaire supérieure de la forme

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{t_{11}} & \times & \cdots & \times \\ & \frac{1}{t_{22}} & \cdots & \times \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \frac{1}{t_{nn}} \end{pmatrix}, \quad \text{où le symbole } \times \text{ désigne des coefficients de valeurs non précisées.}$$

On dispose bien sûr d'un résultat analogue dans le cas des matrices triangulaires inférieures.

☺ ☺ ☺ **Explication** L'assertion (ii) est équivalente au principe suivant que nous connaissons bien : un système linéaire triangulaire possède une et une seule solution si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Nous avons plus ou moins admis ce résultat jusqu'ici.

Démonstration Contentons-nous du cas des matrices triangulaires supérieures : le cas des matrices triangulaires inférieures s'en déduit par transposition.

(i) Une seule petite difficulté : montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires supérieures. Posons $C = AB$ et montrons que C est triangulaire supérieure. Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i > j$. Alors $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$. Pour montrer que $c_{ij} = 0$, il nous suffit de montrer que tous les termes de cette somme sont nuls. Or soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme $i > j$, alors $k < i$ ou $k > j$ forcément. Dans le premier cas, $a_{ik} = 0$; dans le second, $b_{kj} = 0$. Dans les deux cas, $a_{ik}b_{kj} = 0$.

(ii) Raisonnons par récurrence sur la taille n des matrices concernées.

Initialisation : Toute matrice triangulaire supérieure de taille 1 est de la forme (a) où $a \in \mathbb{K}$. Une telle matrice est inversible si et seulement si $a \neq 0$ et dans ce cas $(a)^{-1} = (a^{-1})$. L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible de taille 1 est bien une matrice triangulaire supérieure.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Faisons l'hypothèse que le résultat est vrai pour les matrices triangulaires supérieures de taille n et fixons $T \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure. On peut écrire T sous la forme $T = \begin{pmatrix} T' & C \\ 0 & a \end{pmatrix}$, où $T' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure de taille n , $a \in \mathbb{K}$ et où $C \in \mathbb{K}^n$ est une colonne.

- Supposons T à coefficients diagonaux non nuls. Alors T' est inversible par hypothèse de récurrence, et T'^{-1} est triangulaire à coefficients diagonaux inverses de ceux de T' . Le système $T'X = -\frac{1}{a}C$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède donc une et une seule solution D , de sorte que $T'D + \frac{1}{a}C = 0$.

Remarquons alors que $\begin{pmatrix} T' & C \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T'^{-1} & D \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T'T'^{-1} & T'D + \frac{1}{a}C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1}$. Conclusion : T est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} T'^{-1} & D \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ triangulaire supérieure. En outre on peut bien dire que les coefficients diagonaux de T^{-1} sont exactement les inverses de ceux de T .

- Réciproquement, supposons T inversible. Alors les lignes de T forment une famille libre, donc sa dernière ligne est non nulle : $a \neq 0$. De même, les n premières colonnes de T forment une famille libre, donc comme le dernier coefficient de chacune est nul, les colonnes de T' forment une famille libre : bref, T' est inversible, donc à coefficients diagonaux non nuls par hypothèse de récurrence. ■

3.3.3 MATRICES SYMÉTRIQUES ET ANTISYMÉTRIQUES

Définition (Matrice symétrique/antisymétrique) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est *symétrique* si ${}^tA = A$.
- On dit que A est *antisymétrique* si ${}^tA = -A$.

Exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est symétrique et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Remarquez bien ceci : la diagonale d'une matrice antisymétrique est nulle car chaque coefficient diagonal est égal à son opposé.

⚡⚡⚡ **Attention !**

Matrice symétrique $\neq$ Matrice d'une symétrie

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une symétrie de $\mathbb{R}^2$ car son carré vaut I_2 , mais elle n'est pas symétrique. Inversement, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique mais n'est pas une symétrie, car son carré n'est pas I_2 .

4 CHANGEMENTS DE BASE ET MATRICES SEMBLABLES

4.1 CHANGEMENTS DE BASE

Définition (Matrice de passage d'une base à une autre) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . On appelle *matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$* la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, qui est aussi égale à $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id}_E)$.

Théorème Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E , P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et P' la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}''$.

- P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
- PP' est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$.

Démonstration

- (i) La matrice P est inversible comme matrice d'un isomorphisme — ici l'application identité Id_E . Du coup
- $$P^{-1} = \left(\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E) \right)^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id}_E^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id}_E), \text{ donc } P^{-1} \text{ est la matrice de passage de } \mathcal{B}' \text{ à } \mathcal{B}.$$
- (ii) $PP' = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}'}(\text{Id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}}(\text{Id}_E \circ \text{Id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$, donc PP' est bien la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$. ■

✂ ✂ ✂ **Explication** L'assertion (i) précédente admet une réciproque : toute matrice inversible peut être vue comme une matrice de passage. Voyons cela sur l'exemple de $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, inversible car triangulaire à coefficients diagonaux non nuls.

- 1) On peut voir P comme la matrice de passage de la base canonique à la base $((1, 0, 0), (2, 4, 0), (1, 2, 8))$ de $\mathbb{R}^3$.
- 2) On peut voir P comme la matrice de passage de la base canonique à la base $(1, 4X + 2, 8X^2 + 2X + 1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
- 3) Plus abstraitement, si E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et si (e_1, e_2, e_3) en est une base, alors P est la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à la base $(e_1, 2e_1 + 4e_2, e_1 + 2e_2 + 8e_3)$.

Théorème (Théorème du changement de base) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E , $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F , P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$.

- (i) **Versión vecteur** : Soit $x \in E$. On pose $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$. Alors : $X = PX'$.
- (ii) **Versión application linéaire** : Soit f une application linéaire de E dans F . On pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f)$. Alors : $A' = Q^{-1}AP$.

Démonstration Nous savons que $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$ et que $Q = \text{Mat}_{\mathcal{C}', \mathcal{C}}(\text{Id}_F)$.

- (i) En termes matriciels, l'égalité $x = \text{Id}_E(x)$ s'écrit, dans les bases adaptées, $X = PX'$.
- (ii) Simple calcul : $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(\text{Id}_F^{-1} \circ f \circ \text{Id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{C}', \mathcal{C}'}(\text{Id}_F^{-1}) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$
- $$= \left(\text{Mat}_{\mathcal{C}', \mathcal{C}}(\text{Id}_F) \right)^{-1} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E) = Q^{-1}AP. \quad \blacksquare$$

Exemple Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Notons $(\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et :

$$\begin{cases} \vec{u}_\theta &= \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{v}_\theta &= -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \end{cases}$$

- (i) Alors $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Soit $\vec{u} = (x, y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Les coordonnées de $\vec{u}$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$ sont bien sûr $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Notons $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$. Alors :

$$\begin{cases} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

En géométrie élémentaire de début d'année, nous aurions bien sûr obtenu les mêmes formules de changement de base.

En effet

- (i) La liberté de $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ suffirait mais il y a même plus simple. La matrice de $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$ est $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, de déterminant $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \neq 0$. Cette matrice est donc inversible, donc $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- (ii) Puisque $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j})$ à $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$, alors $X = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} X'$. L'autre formule se démontre de la même manière : il suffit de remarquer que la matrice de passage de $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ à $(\vec{i}, \vec{j})$ est $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

4.2 MATRICES SEMBLABLES

Définition (Matrices semblables)

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que B est *semblable* à A (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.
- La relation de similitude sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence.

Démonstration

- **Réflexivité** : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est semblable à A car I_n est inversible et $A = I_n^{-1}AI_n$.
- **Symétrie** : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose B semblable à A . Il existe donc $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Alors P^{-1} est inversible et $A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$, de sorte que A est semblable à B .
- **Transitivité** : Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose B semblable à A et C semblable à B . Il existe donc $P, Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$. Alors PQ est inversible par produit et $C = Q^{-1}BQ = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$, donc C est semblable à A . ■

Exemple Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est semblable à $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ puisque comme on l'a vu, si P désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)P$.

5 RANG D'UNE MATRICE

Définition (Rang d'une matrice) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A , vue comme application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, est égal au rang de la famille des colonnes de A dans $\mathbb{K}^n$.

On appelle *rang de A* , noté $\text{rg}(A)$, la valeur commune de ces deux notions de rang.

Démonstration Notons $C_1, C_2, \dots, C_p$ les colonnes de A dans l'ordre naturel et $(E_1, E_2, \dots, E_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. Alors : $\text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p) = \text{Vect}(AE_1, AE_2, \dots, AE_p) = \text{Im } A$. En particulier, comme voulu, $\text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p)$ et $\text{Im } A$ ont même dimension. ■

Exemple Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si A possède une colonne nulle, et si A' est la matrice obtenue à partir de A après suppression de cette colonne nulle, alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(A')$.

En effet Le rang de A est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par les colonnes de A . Or dans un **Vect**, on peut toujours se débarrasser des vecteurs nuls, donc si A possède une colonne nulle. . .

Théorème (Rang d'un système linéaire) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. On appelle *rang* du système linéaire $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$ le rang de la matrice A de ce système.

(i) L'ensemble des solutions du système **homogène** $AX = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$, qui n'est autre que le noyau **Ker** A de l'application linéaire associée à A , est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p - \text{rg}(A)$.

(ii) Dans le cas général :

- soit le système linéaire $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$ ne possède pas de solution ;
- soit, s'il en possède une X_0 , l'ensemble de toutes ses solutions est l'ensemble $X_0 + \text{Ker } A$.

On rappelle que lorsque le système est de Cramer, i.e. lorsque A est inversible, le système admet $A^{-1}B$ pour solution unique.

Démonstration

(i) Simple application du théorème du rang, puisque le rang de A comme matrice est par définition son rang comme application linéaire.

(ii) Si le système possède une solution X_0 , alors pour tout $X \in \mathbb{K}^p$:

$$AX = B \iff AX = AX_0 \iff A(X - X_0) = 0 \iff X - X_0 \in \text{Ker } A \iff X \in X_0 + \text{Ker } A. \quad \blacksquare$$

Corollaire (Rang et inversibilité) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\text{rg}(A) = n$.

Démonstration A est inversible $\iff$ La famille des colonnes de A est une base de $\mathbb{K}^n$

$$\iff \text{Le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de } A \text{ est de dimension } n \iff \text{rg}(A) = n. \quad \blacksquare$$

Théorème (Relation entre les différentes notions de rang) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F .

- (i) Soit $\mathcal{F}$ une famille (finie) de vecteurs de E . Alors : $\text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right) = \text{rg}(\mathcal{F})$.
- (ii) Soit f une application linéaire de E dans F . Alors : $\text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\right) = \text{rg}(f)$.

 **En pratique** Ce théorème montre que tout rang (famille de vecteurs ou application linéaire) peut être calculé comme le rang d'une matrice. Or le calcul d'un rang fournit de précieux renseignements. Par exemple, nous avons démontré les équivalences suivantes, dans notre chapitre sur les espaces vectoriels de dimension finie :

- 1) f est injective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim E$. 2) f est surjective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim F$.

Sans parler bien sûr du précieux théorème du rang ! Nous étudierons bientôt une technique de calcul rapide et simple du rang.

Démonstration

- (i) Introduisons les vecteurs de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$: $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$, ainsi que les colonnes $C_1, C_2, \dots, C_p$ de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ dans l'ordre naturel. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E , nous pouvons en outre noter φ l'isomorphisme $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \mapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ de $\mathbb{K}^n$ sur E . Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$: $\varphi(C_k) = f_k$. Or φ induit par restriction un isomorphisme de $\mathbf{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p)$ sur $\mathbf{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_p) = \mathbf{Vect}(\mathcal{F})$. En particulier : $\text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right) = \text{rg}(C_1, C_2, \dots, C_p) = \dim \mathbf{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p) = \dim \mathbf{Vect}(\mathcal{F}) = \text{rg}(\mathcal{F})$.
- (ii) $\text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\right) = \text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(\mathcal{B}))\right) \stackrel{(i)}{=} \text{rg}(f(\mathcal{B})) = \dim \mathbf{Vect}(f(\mathcal{B})) = \dim \mathbf{Im} f = \text{rg}(f)$. ■

Théorème (Invariance du rang par produit par une matrice inversible)

- (i) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors $\text{rg}(AP) = \text{rg}(A)$ et $\text{rg}(QA) = \text{rg}(A)$.
- (ii) Deux matrices semblables ont le même rang.

Démonstration Pour prouver (i), considérons chaque matrice comme une application linéaire. Alors toute matrice $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^p$ et toute matrice $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$. Or nous savons que le rang d'une application linéaire n'est pas modifié quand on compose cette application par un automorphisme. Ici, avec des matrices, composer revient à faire un produit. ■

Théorème (Décomposition $UJ_{n,p,r}V$ d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r . Il existe deux matrices $U \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $V \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ (bref, inversibles) telles que $A = UJ_{n,p,r}V$, où $J_{n,p,r}$ est la matrice de taille $n \times p$ suivante :

$$J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & 0 \end{matrix}}^{r \text{ colonnes}} & & \\ \hline & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration

- Considérons A comme une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$. Si nous notons $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, nous savons qu'alors $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_n}(A)$. Notre objectif dans cette preuve : trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^p$ et une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^n$ pour lesquelles $\text{Mat}(A) = J_{n,p,r}$. Pourquoi ? Notant U la matrice de passage de $\mathcal{B}_n$ à $\mathcal{C}$ et V la matrice de passage de $\mathcal{B}_p$ à $\mathcal{B}$, nous pourrions affirmer par changement de base, comme voulu, que : $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_n}(A) = (U^{-1})^{-1} \times \text{Mat}(A) \times V = UJ_{n,p,r}V$.
- Donnons-nous une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ de $\mathbb{K}^p$ et une base $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ de $\mathbb{K}^n$ quelconques. Que faut-il imposer à ces bases pour que la matrice de A y soit $J_{n,p,r}$?

1) Pour que les $p - r$ dernières colonnes de $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(A)$ soient nulles, il est nécessaire que les vecteurs $e_{p-r+1}, e_{p-r+2}, \dots, e_p$ soient linéairement indépendants et éléments de $\mathbf{Ker} A$. Comme $\mathbf{Ker} A$ est de dimension $p - r$ d'après le théorème du rang, nous n'avons qu'à choisir pour famille $(e_{p-r+1}, e_{p-r+2}, \dots, e_p)$ une base de $\mathbf{Ker} A$ et la compléter simplement en une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^p$.

2) Pour que les r premières colonnes de $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(A)$ soient celles qu'on veut, il suffit qu'on pose $f_k = A(e_k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, puis qu'on complète en une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^n$. Encore faut-il, pour pouvoir compléter, que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_r)$ soit bien libre. Or la famille $(e_1, e_2, \dots, e_r)$, par construction, engendre un supplémentaire I de $\text{Ker } A$ dans $\mathbb{K}^p$ et nous savons qu'alors A induit par restriction un isomorphisme de I sur $\text{Im } A$. La famille $(f_1, f_2, \dots, f_r) = (A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_r))$ est ainsi bien libre.

Voilà : nous avons garanti l'existence des deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. ■

Corollaire (Invariance du rang par transposition) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors : $\text{rg}({}^t A) = \text{rg}(A)$.

Démonstration Notons r le rang de A et introduisons $U \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $V \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = UJ_{n,p,r}V$. Alors : $\text{rg}({}^t A) = \text{rg}({}^t(UJ_{n,p,r}V)) = \text{rg}({}^t V {}^t J_{n,p,r} {}^t U) = \text{rg}({}^t V J_{p,n,r} {}^t U)$ car ${}^t J_{n,p,r} = J_{p,n,r}$. Or ${}^t U$ et ${}^t V$ sont inversibles car U et V le sont, donc puisque le rang est invariant par multiplication par une matrice inversible : $\text{rg}({}^t A) = \text{rg}(J_{p,n,r}) = r = \text{rg}(A)$. ■

6 OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES MATRICES

6.1 DÉFINITION

Définition (Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes) Soient $i, j \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle *opération élémentaire sur les lignes* d'une matrice les opérations suivantes :

- permutation des $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes, notée $L_i \leftrightarrow L_j$;
- multiplication de la $i^{\text{ème}}$ ligne par le scalaire $\lambda \neq 0$, notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$;
- addition de la $j^{\text{ème}}$ ligne multipliée par le scalaire λ à la $i^{\text{ème}}$ ligne (avec $i \neq j$), notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

On définit de même la notion d'*opération élémentaire sur les colonnes* d'une matrice. Les notations associées sont respectivement $C_i \leftrightarrow C_j$, $C_i \leftarrow \lambda C_i$ et $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$.

La démonstration du théorème suivant requiert seulement un minimum d'enthousiasme calculatoire. Calculez.

Théorème (Opérations élémentaires = multiplication par certaines matrices inversibles) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

• Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$ est équivalente à la multiplication de A à gauche par :

$$i \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc|ccc} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & 1 & & \\ \hline & & & & & 1 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & 0 & & \\ \hline j \rightarrow & & & & & 1 & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & 1 & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{array} \right)$$

• Soient $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. L'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$ est équivalente à la multiplication de A à gauche par :

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc|ccc} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & \lambda & & & & & & \\ \hline & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \end{array} \right)$$

• Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. L'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est équivalente à la multiplication de A à gauche par :

$$i \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc|ccc} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ \hline & & & & & \lambda & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & 1 & \\ \hline & & & & & & & & & & 1 \end{array} \right)$$

Toutes les matrices par lesquelles on a multiplié A ci-dessus sont **inversibles**.

Si, au lieu de multiplier à gauche, on multiplie A à droite par les matrices décrites ci-dessus, on obtient une simulation des opérations élémentaires sur les colonnes, respectivement : $C_i \leftrightarrow C_j$, $C_i \leftarrow \lambda C_i$ et $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$ — à condition de faire varier i et j dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ et non plus dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

××× Attention !

Opérations élémentaires sur les **lignes** = Multiplication à **gauche**

Opérations élémentaires sur les **colonnes** = Multiplication à **droite**

Démonstration La matrice associée à l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$ est inversible car son carré vaut I_n — c'est une symétrie. Quant aux matrices associées aux opérations élémentaires $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, elle sont triangulaires à coefficients diagonaux tous non nuls, donc inversibles. ■

6.2 MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS POUR LE CALCUL DU RANG

Théorème (Propriétés d'invariance du rang)

- (i) Les opérations élémentaires sur les matrices préservent le rang.
- (ii) La suppression d'une colonne nulle ou d'une ligne nulle préserve le rang.

Démonstration

- (i) Les opérations élémentaires sont des multiplications par des matrices **inversibles**, donc préservent le rang.
- (ii) Déjà vu pour les colonnes. Pour les lignes, ne pas oublier que le rang est invariant par transposition. ■

 **En pratique** Décrivons à présent comment l'*algorithme du pivot de Gauss* peut être utilisé pour calculer rapidement le rang d'une matrice. Partons d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'algorithme suivant ramène le calcul du rang de A au calcul du rang d'une matrice de taille strictement plus petite sur laquelle le procédé doit être répété à l'identique.

0) Si $A = 0$, alors $\text{rg}(A) = 0$ — sortie de l'algorithme.

1) Sinon au moins un coefficient de A est non nul. En permutant les lignes et les colonnes de A , on se ramène au calcul du rang d'une matrice de même rang que A dont le coefficient a de position $(1, 1)$ est non nul. Ce coefficient a est alors qualifié de *pivot*.

2) A l'aide du pivot a , on annule par des opérations élémentaires sur les lignes tous les termes de la première colonne de la matrice obtenue à l'issue de l'étape 1) (à l'exception du pivot).

3) Toujours à l'aide du pivot a , on annule ensuite par des opérations élémentaires sur les colonnes tous les termes de la première ligne de la matrice obtenue à l'issue de l'étape 2) (à l'exception du pivot).

4) La première colonne de la matrice obtenue à l'issue de l'étape 3) est clairement **non** combinaison linéaire des autres colonnes de cette matrice. Ceci explique le résultat de l'étape 4) figuré ci-dessous.

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} a & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \times & \times & \cdots & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Etape 1}} \text{rg} \begin{pmatrix} a & \times & \cdots & \times \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Etape 2}} \text{rg} \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Etape 3}} \text{rg} \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Etape 4}} \text{rg}(A') + 1.$$

Cette étape n'a pas à figurer sur vos copies, vous pouvez directement passer à l'étape 4).

L'algorithme ainsi décrit se termine avec certitude car A' est strictement plus petite en taille que A .

Exemple

$$\begin{aligned} \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} &= \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \text{rg} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_4} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{2} L_4} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 2 = 4 \quad \text{car les vecteurs } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sont non colinéaires.} \end{aligned}$$

6.3 MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS POUR L'INVERSIBILITÉ D'UNE MATRICE

 **En pratique** En résolvant un système linéaire au moyen de l'*algorithme du pivot de Gauss*, on a vu qu'on pouvait savoir aisément si une matrice est inversible ou non et, le cas échéant, calculer son inverse. Nous présentons ici la même méthode d'une autre façon, sans systèmes linéaires. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Supposons qu'on puisse ramener A à la matrice I_n par des opérations élémentaires **uniquement sur les lignes** de A . Si k opérations élémentaires sont nécessaires, de matrices $P_1, P_2, \dots, P_k$, alors : $P_k P_{k-1} \dots P_1 A = I_n$ (multiplications à **gauche** car opérations sur les **lignes**). Bref, si P est la matrice $P_k P_{k-1} \dots P_1$, alors $PA = I_n$, donc A est inversible d'inverse P . Comme alors $A^{-1} = P_k P_{k-1} \dots P_1 \times I_n$, A^{-1} s'obtient donc à partir de la matrice I_n grâce aux mêmes opérations qui nous ont fait passer de A à I_n , dans le même ordre.
- Réciproquement, nous admettrons pour gagner du temps que, si A inversible, alors on peut ramener A à la matrice I_n par des opérations élémentaires uniquement sur les lignes.

XXXX Attention ! Il est impératif que vos opérations élémentaires se fassent ici toutes sur les lignes — ou bien toutes sur les colonnes, c'est également possible. Les mélanges sont interdits !

Exemple La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

En effet Introduisez toujours vos calculs par une petite phrase rituelle d'explication. Par exemple : « Nous allons faire subir aux matrices A et I_n les mêmes opérations élémentaires sur les lignes jusqu'à obtenir, si possible, I_n à la place de A . C'est alors A^{-1} que nous trouverons à la place de I_n . »

$$\begin{array}{lcl}
 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} & I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow 2L_2 - L_3 \\
 I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3
 \end{array}$$

Exemple La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

En effet Nous allons faire subir aux matrices A et I_n les mêmes opérations élémentaires sur les lignes jusqu'à obtenir, si possible, I_n à la place de A . C'est alors A^{-1} que nous trouverons à la place de I_n .

$$\begin{array}{lcl}
 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{INUTILE !} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_2 + 3L_3
 \end{array}$$

Aïe ! Dans la partie gauche de la matrice, nous avons transformé A en une matrice possédant une ligne nulle par des opérations élémentaires. Les opérations élémentaires étant des opérations inversibles, cela montre que A n'est pas inversible. Ici, le travail sur la matrice I_n à droite était donc inutile.